Séries entières

1 Définition et rayon de convergence

1.1 Qu'est ce qu'une série entière ?

Définition 1 – Série entière

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.
On appelle *série entière* de la variable $z \in \mathbb{C}$ la série de fonctions $\sum f_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$.

En pratique, on notera (abusivement) $\sum a_n z^n$ pour désigner une série entière.

Exemple 2 – *Série entière ou pas*

Lesquelles sont des séries entières parmi :

$$\sum z^n, \quad \sum \frac{1}{n} z^{2n}, \quad \sum n! z^{n/2}, \quad \sum \frac{1}{n^n} z^{3n+1}, \quad \sum \frac{n}{z^n}, \quad \sum \sin(n) z^{n^2}.$$

1.2 Rayon de convergence

Proposition 3 – Lemme d'Abel

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_n$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration. En notant M un majorant de $(a_n z_0^n)_n$, on montre que $|a_n z^n| \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ et on conclut par comparaison à une série géométrique convergente. ❏

Définition 4 – Rayon de convergence

On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$, le nombre réel ou infini :

$$R = R\left(\sum a_n z^n\right) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} \in [0\,;+\infty].$$

Remarque. En particulier, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence. Cela peut être utile pour se ramener à des coefficients réels (positifs).

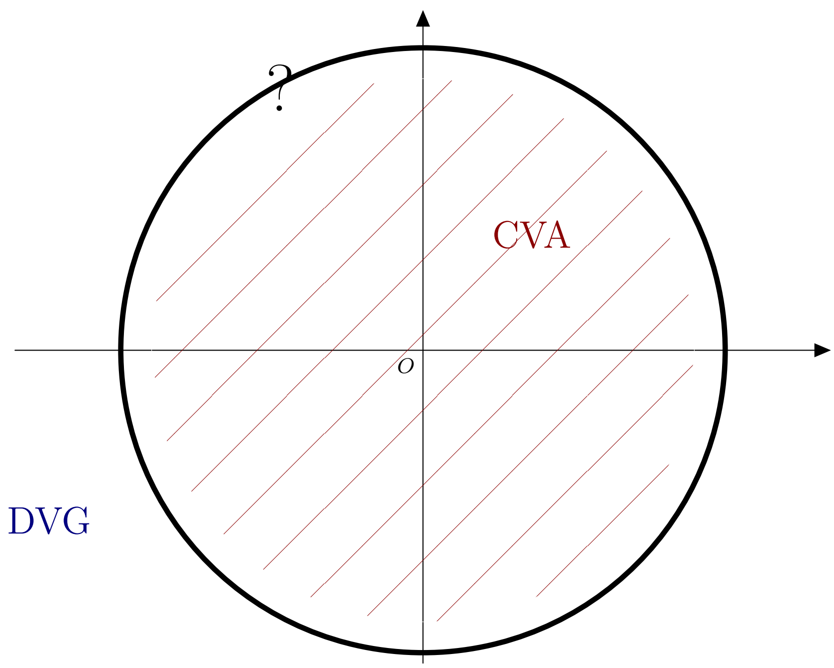
Exemple 5 – *Rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$.*

1.3 Lien avec la convergence

Théorème 6 – Rayon de convergence et nature de la série

1. Si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration. 1. Si $|z| < R$, considérer $r = \frac{|z|+R}{2}$ et utiliser le lemme d'Abel.
2. Si $|z| > R$, utiliser la définition de R pour montrer que $a_n z^n \cancel{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$. ❑



Exemple 7 – *Rayon de convergence de* $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ *et de* $\sum \dfrac{z^n}{3^n}$.

Définition 8 – Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
L'intervalle réel $]-R\,;R[$ est appelé *intervalle ouvert de convergence.*
L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé *disque ouvert de convergence.*

D'après la proposition précédente, une série entière converge absolument sur son intervalle / disque **ouvert** de convergence. En revanche, tout peut se passer au bord, c'est-à-dire en un nombre z tel que $|z| = R$. Ce bord est souvent appelé cercle d'incertitude.

⚠ En particulier, l'ensemble de définition de la somme contient toujours l'intervalle ouvert de convergence, mais il n'y a pas forcément égalité car la série peut converger en des points situés au bord.

Exemple 9 – *Déterminer l'intervalle ouvert de convergence de* $\sum \dfrac{x^n}{n}$ *puis son ensemble de définition.*

2 Détermination du rayon de convergence

2.1 Tests de valeurs avec la définition

En utilisant la définition 4 du rayon de convergence ou le lien avec la convergence de la série (thm. 6), on remarque que :

- si $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée ou la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors z_0 est dans le disque ouvert de convergence ou sur le cercle d'incertitude donc $|z_0| \leqslant R$;
- si au contraire $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ n'est pas bornée ou la série $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors z_0 est à l'extérieur du disque ouvert de convergence ou sur le cercle d'incertitude donc $R \leqslant |z_0|$.

Exemple 10 – *Retrouver ainsi le rayon de convergence de* $\sum \frac{z^n}{n}$.

2.2 Règles de comparaison

Proposition 11 – Comparaison des rayons de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$ (le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$) ;
2. Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Démonstration. 1. On se ramène à une comparaison des séries numériques $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$.
2. $a_n \sim b_n$ donne $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et on applique deux fois le premier point. ❑

⚠ En particulier, si pour tout n assez grand, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$ (attention au sens des inégalités).

Exemple 12 – *Rayon de convergence de* $\sum \frac{n+\cos(n)}{n^2+n+1} z^n$.

2.3 Utilisation de la règle de d'Alembert

Théorème 13 – Règle de d'Alembert pour les séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0\,;+\infty]$, alors $R = \frac{1}{\ell}$ (avec les conventions « $\frac{1}{+\infty} = 0$ » et « $\frac{1}{0} = +\infty$ »).

Démonstration. C'est une conséquence directe de la règle de d'Alembert pour les séries numériques. ❑

⚠ On croise fréquemment des séries lacunaires, c'est-à-dire des séries pour lesquelles une infinité de a_n sont nuls (par exemple tous les termes impairs). Dans ce cas on reviendra à la règle de d'Alembert pour les séries numériques pour déterminer le rayon de convergence.

Exemple 14 – *Rayon de CV de* $\sum \frac{n+5}{3^n} z^n$.

Exemple 15 – *Rayon de CV de* $\sum \frac{z^{2n}}{(n+1)4^n}$.

Corollaire 16 – Un rayon de convergence usuel

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Démonstration. $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon vaut $\frac{1}{1} = 1$. ❑

2.4 Opérations et rayon de convergence

Proposition 17 – Combinaison linéaire de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

1. Pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, $R\left(\sum \lambda a_n z^n\right) = R_a$.
2. Le rayon de convergence R_S de la somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R_S \geqslant \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.

Démonstration. 1. $(\lambda a_n r^n)_n$ est bornée ssi $(a_n r^n)_n$ l'est.
2. Pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, d'où l'inégalité par linéarité et thm. 6. Si $R_a < R_b$, pour z tel que $R_a < |z| < R_b$, on justifie que $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge et via thm. 6, on obtient $R_S \geqslant R_a$. ❑

Proposition 18 – Produit de Cauchy de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
On rappelle que le *produit de Cauchy* de ces deux séries est la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

On note R_c son rayon de convergence.
Alors $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Démonstration. On se ramène au cas d'un produit de Cauchy de séries numériques. ❑

Proposition 19 – Séries dérivée et primitive

Les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum n a_n x^{n-1}$ et $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. D'une part, comme $|a_n| \leqslant n|a_n|$, d'après prop. 11, on a $R' \leqslant R$. D'autre part, on montre que $n a_n x^n = O(a_n r^n)$ où $|x| < r < R$ pour obtenir l'autre inégalité. ❑

3 Régularité de la somme d'une série de la variable réelle

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux séries entières d'une **variable réelle** à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère ainsi $\sum a_n x^n$ une telle série entière avec x une variable réelle et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R son rayon de convergence et on suppose $R > 0$ pour que l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$ soit non vide. On va s'intéresser aux propriétés de la fonction somme :

$$f\colon \begin{array}{ccc}]-R\,;R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}.$$

Proposition 20 – Convergence normale sur tout segment

Une série entière converge normalement sur **tout segment inclus** dans son intervalle ouvert de convergence.

Démonstration. En notant, $f_n\colon x \mapsto a_n x^n$, on majore $\|f_n\|_{\infty,[a;b]}$ par le terme général d'une série qui est absolument convergente d'après le thm. 6. ❑

3.1 Continuité

Proposition 21 – Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence

La somme f d'une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Démonstration. Théorème de continuité des séries de fonctions avec CVU sur tout segment assurée par la proposition précédente. ❑

⚠ On n'a aucune information sur ce qui se passe au bord. D'ailleurs « *l'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme* ».

3.2 Primitivation

Théorème 22 – Primitivation

Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
La série entière $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a aussi pour rayon de convergence R et sa somme F est l'unique primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$. Autrement dit,

$$\forall x \in \left]-R\,;R\right[,\ \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Démonstration. Prop. 19 pour le rayon de convergence. Ensuite, théorème d'intégration d'une série de fonctions qui converge uniformément sur un segment. ❑

Exemple 23 – *À partir de la série géométrique, déterminer la somme de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Exemple 24 – *Convergence et valeur de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

3.3 Classe $\mathcal{C}^\infty$

Théorème 25 – Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
La fonction somme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$.
De plus, pour tout $x \in\,]-R\,;R[$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}.$$

En particulier, les dérivées de f sont des sommes de séries entières ayant toutes pour rayon de convergence R.

Démonstration. Le rayon de convergence est donné par prop. 19. Ensuite, application du théorème de dérivation d'une série de fonctions avec convergence uniforme sur tout segment via prop. 20. ❑

Exemple 26 – *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x| < 1$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

Remarque. D'après le théorème précédent, pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut chercher à montrer que c'est la somme d'une série entière.

⚠ Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui ne peuvent pas s'écrire comme somme d'une série entière (voir TD).

Corollaire 27 – Expression des coefficients à l'aide des dérivées

Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Démonstration. Évaluer en $x = 0$ la relation du théorème précédent. ❑

Exemple 28 – *Justifier que la fonction* $g\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *puis donner la valeur de* $g^{(n)}(0)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4 Développements en série entière

Définition 29 – Fonction développable en série entière

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-r\,;r[$ avec $r > 0$.
On dit que f est *développable en série entière* sur $]-r\,;r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ dont la somme est f sur $]-r\,;r[$, *i.e.*

$$\forall x \in \,]-r\,;r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit que f est *développable en série entière au voisinage de* 0 s'il existe un réel $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$.

Exemple 30 – *Justifier que la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$ *est développable en série entière au voisinage de* 0 *et préciser le rayon de convergence de ce développement.*

Proposition 31 – Structure de l'ensemble des fonctions DSE

L'ensemble des fonctions développables en série entière sur $]-r\,;r[$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(]-r\,;r[,\mathbb{K})$ stable par produit, primitivation et dérivation.

Démonstration. Reformulation des prop. 17, 18 et 19. ❑

Proposition 32 – Unicité du développement en série entière

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières. S'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in \left]-r\,;r\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Démonstration. C'est une conséquence de l'expression des coefficients en fonction des dérivées, cf cor. 27. ❑

Exemple 33 – *Soit f une fonction paire développable en série entière sur $\left]-r\,;r\right[$ avec $r > 0$. Montrer que les coefficients d'indices impairs de ce développement sont nuls.*

Remarque. Ce résultat d'unicité est utile pour déterminer les solutions développables en série entière d'une équation différentielles (voir TD).

4.1 Série de Taylor et formule de Taylor

Définition 34 – Série de Taylor

Soient $R > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-R\,;R\right[$.
La série entière $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée *série de Taylor* de f.

D'après le corollaire 27, c'est l'unique série entière dont f peut être la somme au voisinage de 0.
⚠ Il se peut que l'égalité entre f et sa série de Taylor ne soit valable qu'en 0 (voir TD).

Proposition 35 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\left]-R\,;R\right[$. Alors, pour $x \in \left]-R\,;R\right[$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a\,;b]$ alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Par récurrence avec une IPP. ❑

Corollaire 36 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\left]-R\,;R\right[$. Alors, pour $x \in \left]-R\,;R\right[$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty,\,[0;x]}.$$

Démonstration. Vue en PCSI : conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral en utilisant l'inégalité triangulaire. ❑

Remarque. Ces deux formules de Taylor sont d'une autre nature que celle de Taylor-Young. En effet cette dernière est seulement un résultat local, utile pour obtenir des limites lorsque $x \to 0$ avec n fixé (penser aux développements limités). A contrario, les deux formules ci-dessus donnent un résultat global (valable pour tout x dans un intervalle) et permettent d'obtenir des limites lorsque $n \to +\infty$ avec x fixé.

4.2 Développements usuels

À partir de l'exponentielle

Développement en série entière	Rayon de convergence	Démonstration
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	Formule de Taylor
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathrm{Re}(e^{ix})$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathrm{Im}(e^{ix})$
$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

À partir de la série géométrique

Développement en série entière	Rayon de convergence	Démonstration
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	Série géométrique
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$x \rightsquigarrow -x$
$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	Primitivation de $\frac{-1}{1-x}$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1	$x \rightsquigarrow -x$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puis primitivation

Un dernier un peu à part

Pour $\alpha \notin \mathbb{N}$:

Développement en série entière	Rayon de convergence	Démonstration
$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)\right) \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$	1	Via une équa. diff.

5 Séries géométrique et exponentielle complexe

Proposition 37 – Continuité sur le disque ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe z.
Sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration. Admis. ❑

Proposition 38 – Développements usuels

- $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Démonstration. 1. Série géométrique.
2. Formule de Taylor avec reste intégral sur $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ avec $z \in \mathbb{C}$ fixé. ❑